Обратные тригонометрические функции. 1

Мы знаем, каким образом для заданного угла α определяются значения его тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса). Очень важной является обратная задача: по известному значению тригонометрической функции угла α определить сам угол α. При решении этой задачи и возникают обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Арксинус

Возьмём произвольное число a. Нас интересует следующий вопрос: каковы углы x, для которых выполнено равенство $\sin x = a$?

Если $a > 1$ или $a < -1$, то ответ прост: таких углов не существует. В самом деле, синус не может принимать значения, по модулю превосходящие единицу.

Если же $|a| \leqslant 1$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sin x$ в бесконечном множестве точек (рис. 1). Стало быть, имеется бесконечно много углов, синус которых равен a.

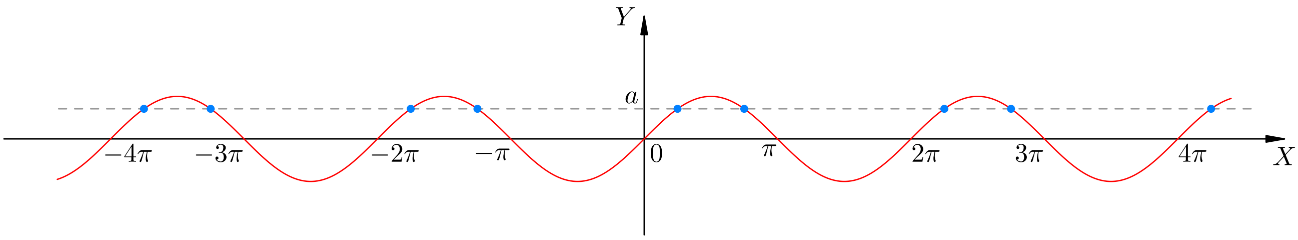

Рис. 1. Углов с данным синусом бесконечно много

Как описать все эти углы, мы разберёмся несколько позже, при решении простейших тригонометрических уравнений. А сейчас давайте посмотрим на рис. 2.

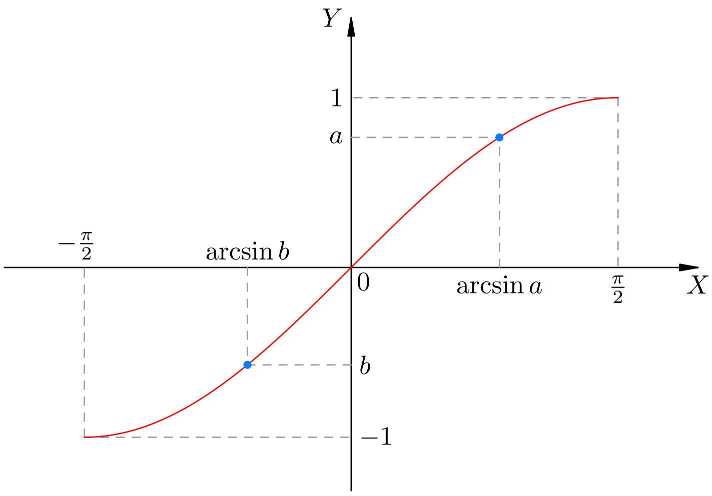

Рис. 2. График синуса на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Мы видим кусок синусоиды $y = \sin x$, который отвечает значениям x, расположенным на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Теперь, каково бы ни было число $a \in [-1; 1]$, прямая $y = a$ пересекает этот кусок *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b). Иными словами, существует *единственное* значение $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которого справедливо равенство $\sin x = a$. Это значение x называется **арксинусом** числа a и обозначается $\arcsin a$.

Определение. Арксинус числа $a \in [-1; 1]$ — это число, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$x = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Переобозначим в (1) величину a через x, а величину x через y:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Мы получили функцию $y = \arcsin x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- *Областью определения функции* $y = \arcsin x$ *является отрезок* $[-1; 1]$. Это следует из соотношения $x = \sin y$ и того факта, что $\sin y$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ пробегает всевозможные значения от -1 до 1.

- *Областью значений функции* $y = \arcsin x$ *является отрезок* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Смотрите вторую строку в определении (2).

График функции $y = \arcsin x$ изображён на рис. 3.

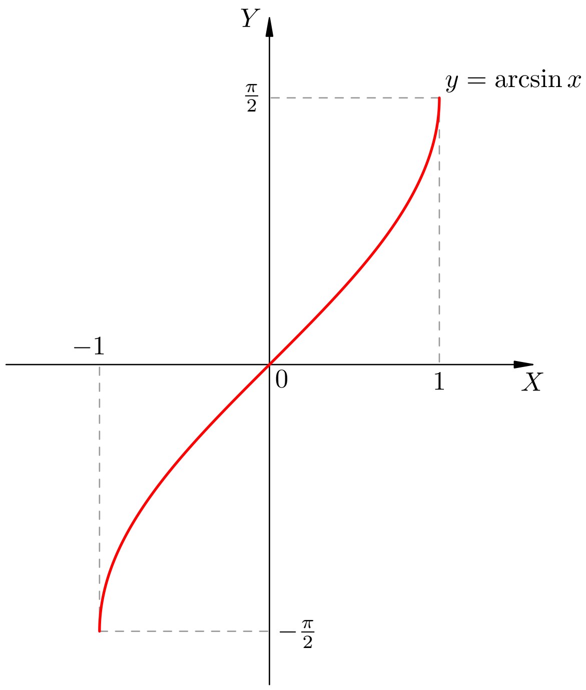

Рис. 3. График функции $y = \arcsin x$

Данная кривая есть тот же самый кусок синусоиды, что и на рис. 2, но только расположенный по-другому. В самом деле, поменяйте на рис. 3 местами буквы X и Y, после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. В результате получится кривая на рис. 2.

Вот хорошее упражнение: нарисуйте график арксинуса и кусок синусоиды на рис. 2 в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

Нетрудно видеть, что график арксинуса симметричен относительно начала координат. Это значит, что *арксинус — нечётная функция*:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \tag{3}$$

Разумеется, нечётность арксинуса легко следует непосредственно из определения (2) и нечётности синуса. Проведите это доказательство самостоятельно.

Из рис. 3 мы видим также, что *функция* $y = \arcsin x$ *возрастает на отрезке* $[-1; 1]$.

Полезно изобразить арксинус на тригонометрической окружности (рис. 4). Как видим, «арксинусы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

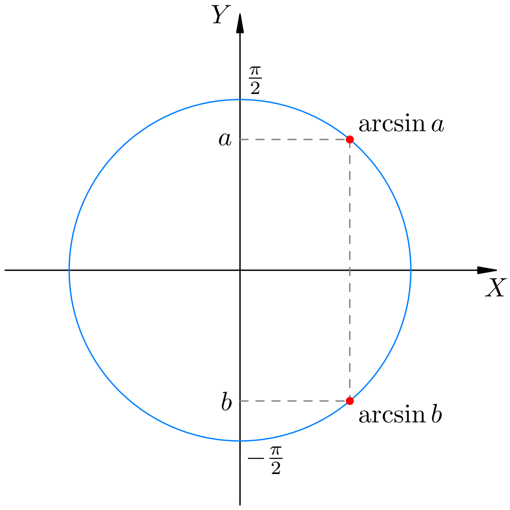

Рис. 4. Арксинус на тригонометрической окружности

На рис. 4 для наглядности изображено также число $b = -a$ и указан $\arcsin b$. Хорошо видна нечётность арксинуса: $\arcsin b = -\arcsin a$.

Пример. Чему равен $\arcsin\frac{1}{2}$? Поскольку $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, имеем $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Конечно, существует много других углов, для которых синус равен $\frac{1}{2}$ (таковы, например, $\frac{5\pi}{6}$ или $-\frac{7\pi}{6}$). Но только один из этих углов — а именно, $\frac{\pi}{6}$ — принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Этот же результат сразу следует из нечётности арксинуса: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Пример. $\sin(\arcsin 0{,}7) = 0{,}7$. Это сразу следует из определения арксинуса; ведь $\arcsin 0{,}7$ — это угол, синус которого равен 0,7.

Вообще, $\sin(\arcsin a) = a$ для всех $a \in [-1; 1]$. Иначе говоря, если взять синус от арксинуса, то мы непременно вернёмся к исходному числу.

Пример. Верно ли, что $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$? Вообще говоря, нет. А именно, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данное равенство будет верным, например:

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Но если $\alpha \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данное равенство окажется неверным. Смотрите:

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, арксинус от синуса не обязательно вернёт нас к исходному числу.

Пример. Вычислим $\cos(\arcsin 0{,}6)$. Обозначим $\arcsin 0{,}6$ через α; таким образом, мы ищем $\cos\alpha$. Согласно основному тригонометрическому тождеству имеем:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64.$$

Мы воспользовались тем, что $\sin\alpha = \sin(\arcsin 0{,}6) = 0{,}6$. Теперь нам нужно извлечь квадратный корень, определившись со знаком косинуса (плюс или минус). Для этого учтём, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (согласно определению арксинуса), а на данном отрезке косинус положителен. Поэтому:

$$\cos\alpha = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$$

Итак, $\cos(\arcsin 0{,}6) = 0{,}8$.

Арккосинус

Если $a > 1$ или $a < -1$, то не существует таких углов x, для которых $\cos x = a$. В самом деле, косинус не может принимать значения, превосходящие по модулю единицу.

Пусть $a \in [-1; 1]$. Возьмём график функции $y = \cos x$ и проведём прямую $y = a$ (рис. 5). Как видим, прямая пересекает график в бесконечном множестве точек. Стало быть, имеется бесконечно много углов, косинус которых равен a.

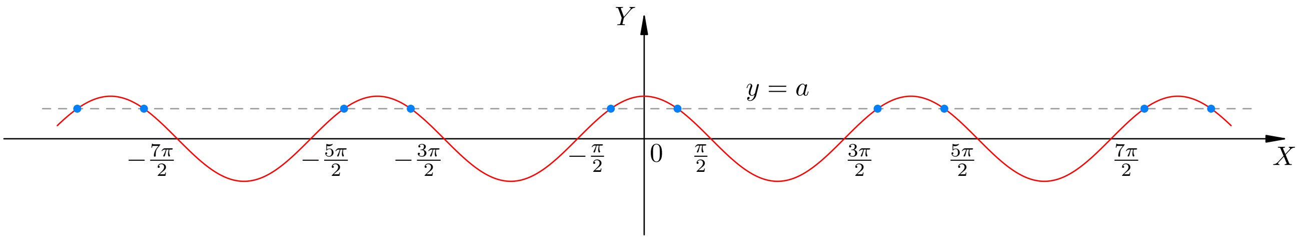

Рис. 5. Углов с данным косинусом бесконечно много

Но нам, как и в случае синуса, хотелось бы, чтобы точка пересечения была единственной. Для этого нужно ограничиться подходящим куском графика косинуса.

В данном случае годится кусок, соответствующий значениям $x \in [0; \pi]$ (рис. 6). Действительно, мы видим, что при любом $a \in [-1; 1]$ прямая $y = a$ пересекает этот кусок *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

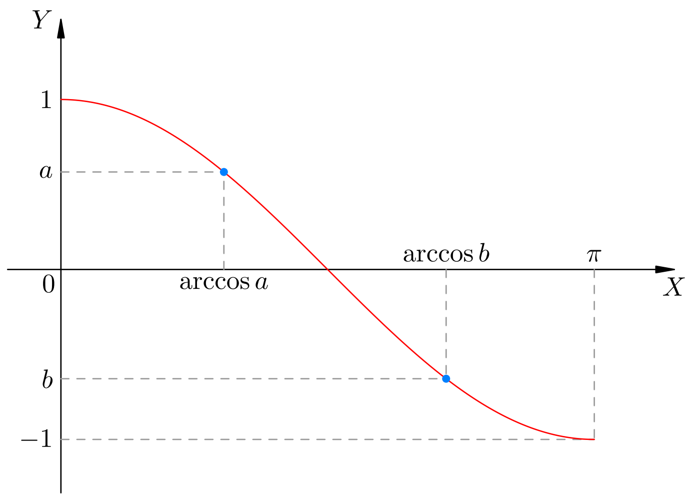

Рис. 6. График косинуса на отрезке $[0; \pi]$

Иными словами, существует *единственное* значение $x \in [0; \pi]$, для которого справедливо равенство $\cos x = a$. Это значение x называется **арккосинусом** числа a и обозначается $\arccos a$.

Определение. Арккосинус числа $a \in [-1; 1]$ — это число, принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен a:

$$x = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, \\ x \in [0; \pi]. \end{cases} \qquad (4)$$

Переобозначим в (4) величину a через x, а величину x через y:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x, \\ y \in [0; \pi]. \end{cases} \qquad (5)$$

Получилась функция $y = \arccos x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- *Областью определения функции* $y = \arccos x$ *является отрезок* $[-1; 1]$. Это следует из соотношения $x = \cos y$ и того факта, что $\cos y$ на отрезке $[0; \pi]$ пробегает всевозможные значения от -1 до 1.

- *Областью значений функции* $y = \arccos x$ *является отрезок* $[0; \pi]$. Смотрите вторую строку в определении (5).

График функции $y = \arccos x$ изображён на рис. 7.

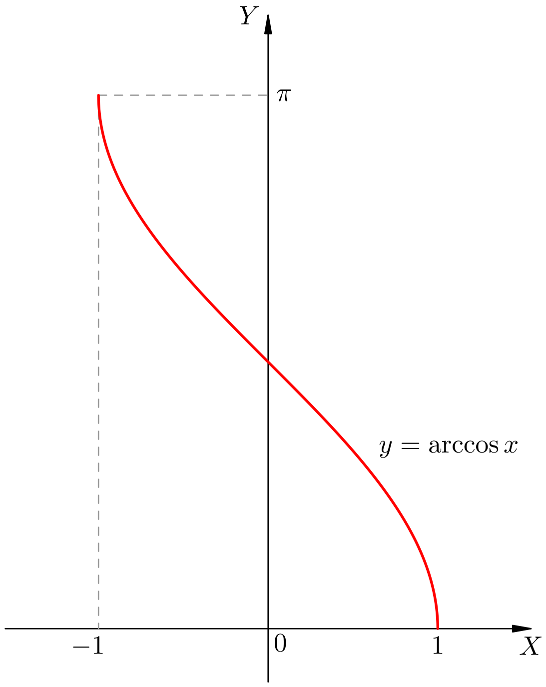

Рис. 7. График функции $y = \arccos x$

График арккосинуса — это та же самая линия, что и на рис. 6, но только расположенная по-другому. Действительно, поменяйте на рис. 7 местами буквы X и Y, после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. Вы получите в точности кривую на рис. 6.

Кроме того, нарисуйте оба этих графика в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

График арккосинуса не симметричен относительно оси Y и не симметричен относительно начала координат. Стало быть, *арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией.*

Из рис. 7 мы видим также, что *функция* $y = \arccos x$ *убывает на отрезке* $[-1; 1]$.

Изобразим арккосинус на тригонометрической окружности (рис. 8). Как видим, «арккосинусы живут сверху» (то есть на верхней полуокружности), но не просто сверху, а именно на отрезке $[0; \pi]$.

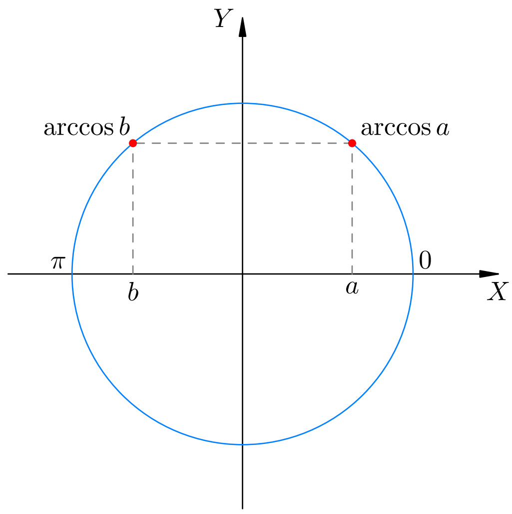

Рис. 8. Арккосинус на тригонометрической окружности

Наряду с числом a мы для наглядности показали на рисунке число $b = -a$. Легко видеть, что соответствующие арккосинусы связаны соотношением $\arccos b = \pi - \arccos a$. Таким образом, аналогом равенства (3) в случае арккосинуса служит следующее соотношение:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \tag{6}$$

Пример. $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Пример. $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Как видим, соотношение (6) выполнено: $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, то есть $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2}$.

Пример. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство $\cos(\arccos a) = a$. Это прямо следует из определения арккосинуса — ведь $\arccos a$ есть угол, косинус которого равен a. Таким образом, косинус от арккосинуса непременно возвращает нас к исходному числу.

Пример. А вот взятие арккосинуса от косинуса не обязательно даст исходное число; иными словами, равенство $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, вообще говоря, не верно.

Если $\alpha \in [0; \pi]$, до данное равенство выполнено. Например:

$$\arccos \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Но если $\alpha \notin [0; \pi]$, то равенство нарушается:

$$\arccos \left(\cos \frac{11\pi}{6}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{11\pi}{6}\,.$$

Пример. Вычислим $\sin(\arccos 0{,}8)$. Пусть $\arccos 0{,}8 = \alpha$; таким образом, мы ищем $\sin \alpha$. Имеем:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2(\arccos 0{,}8) = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36.$$

Будучи арккосинусом, угол α принадлежит отрезку $[0; \pi]$. На этом отрезке синус положителен, поэтому

$$\sin \alpha = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$$

Итак, $\sin(\arccos 0{,}8) = 0{,}6$.

Связь арксинуса и арккосинуса

Арксинус и арккосинус одного и того же числа x связаны простой формулой:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Докажем её. Пусть $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$. Требуется показать, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

С одной стороны, имеем $x = \sin\alpha$, причём $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. С другой стороны, $x = \cos\beta$, причём $\beta \in [0; \pi]$. Отсюда $\sin\alpha = \cos\beta$ или, согласно формуле приведения,

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Теперь заметим, что величина $\frac{\pi}{2} - \beta$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (так же, как и α). Но если равны синусы двух углов, расположенных на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то совпадают и сами углы:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

то есть

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\,,$$

что нам и требовалось. Формула (7) тем самым доказана.

Арктангенс

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = a$ (рис. 9).

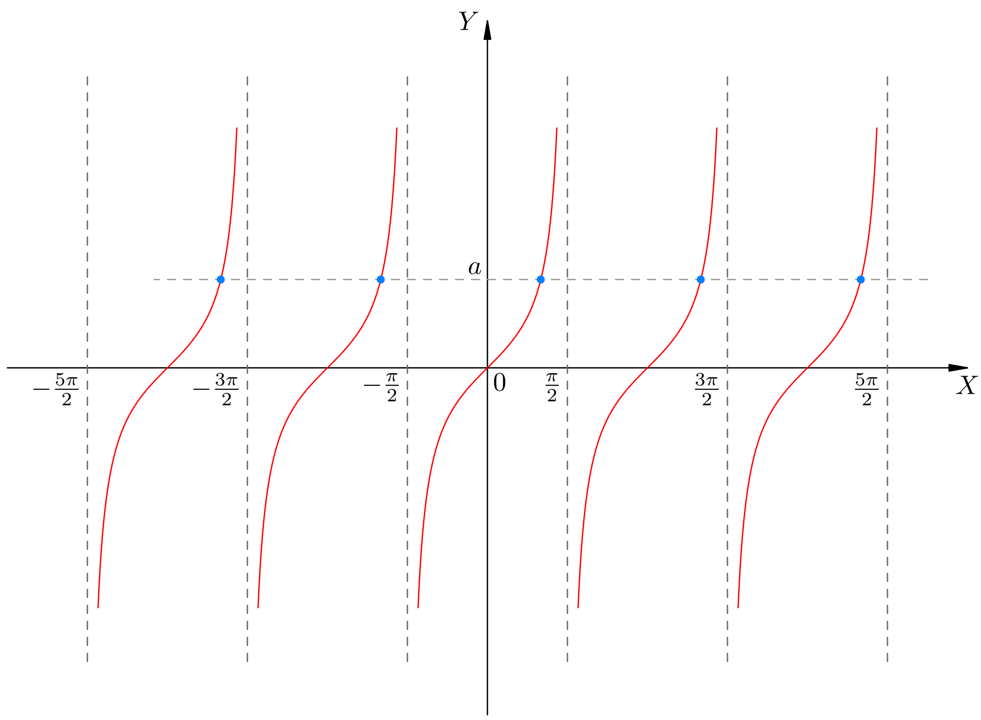

Рис. 9. Углов с данным тангенсом бесконечно много

Мы видим, что при любом a прямая пересекает график тангенса в бесконечном множестве точек. Следовательно, каково бы ни было число a, найдётся бесконечно много углов x, тангенс которых равен a.

Как и раньше, мы хотим едиственности точки пересечения прямой и графика. Для этого следует ограничиться одной из ветвей тангенса. Естественно выбрать «центральную» ветвь графика, отвечающую значениям x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда получится картина, изображённая на рис. 10.

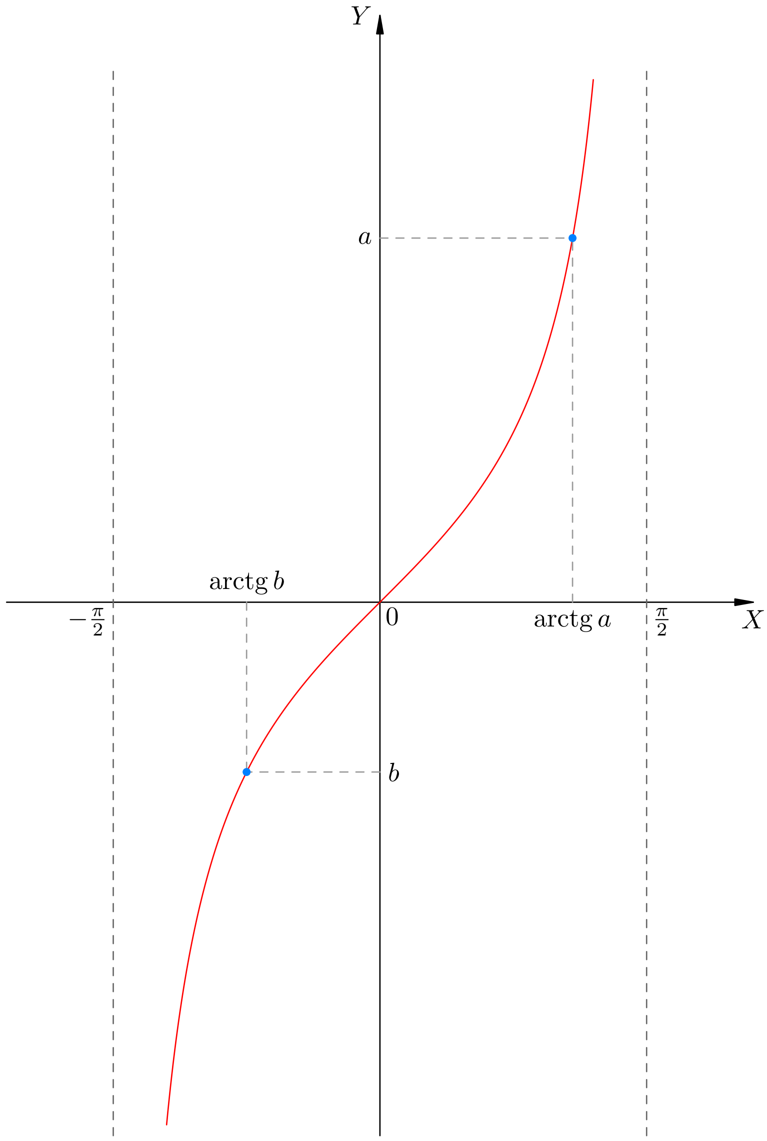

Рис. 10. График тангенса на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Теперь при любом a прямая $y = a$ пересекает выбранную ветвь *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

Иными словами, существует *единственное* значение x на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для которого справедливо равенство $\operatorname{tg} x = a$. Это значение x называется **арктангенсом** числа a и обозначается $\operatorname{arctg} a$.

Определение. Арктангенс числа a — это число, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$x = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Переобозначим в (8) величину a через x, а величину x через y:

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x, \\ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Мы получили функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- *Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.* Это следует из соотношения $x = \operatorname{tg} y$ и того факта, что $\operatorname{tg} y$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пробегает всё множество $\mathbb{R}$.
- *Областью значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ является интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.* Смотрите вторую строку в определении (9).

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображён на рис. 11.

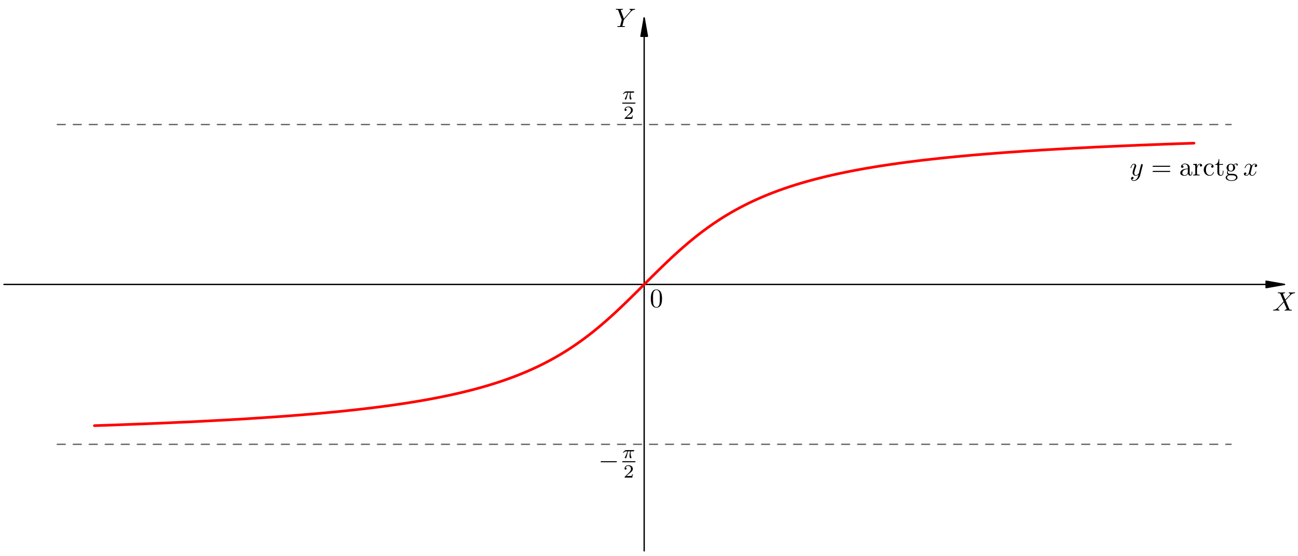

Рис. 11. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

График арктангенса есть та же центральная ветвь графика тангенса, но расположенная по-другому. Действительно, поменяйте местами, как и раньше, буквы X и Y на рис. 11, после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. В результате получится цетральная ветвь тангенса, изображённая на рис. 10.

Нарисуйте также график арктангенса и центральную ветвь тангенса в одной системе координат и убедитесь, что данные графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Легко видеть, что график арктангенса симметричен относительно начала координат. Это значит, что *арктангенс — нечётная функция*:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \tag{10}$$

Разумеется, нечётность арктангенса легко доказать непосредственно из определения (9), воспользовавшись нечётностью тангенса. Сделайте это самостоятельно.

Важной особенностью арктангенса является наличие у графика двух горизонтальных асимптот. Это прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$, к которым график неограниченно приближается при $x \to \pm\infty$. Разумеется, горизонтальные асимптоты арктангенса суть не что иное, как отражённые относительно прямой $y = x$ вертикальные асимптоты $x = \pm\frac{\pi}{2}$ центральной ветви тангенса.

Из рис. 11 мы видим также, что *функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой прямой.*

Изобразим арктангенс на тригонометрической окружности (рис. 12). Как видим, «арктангенсы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

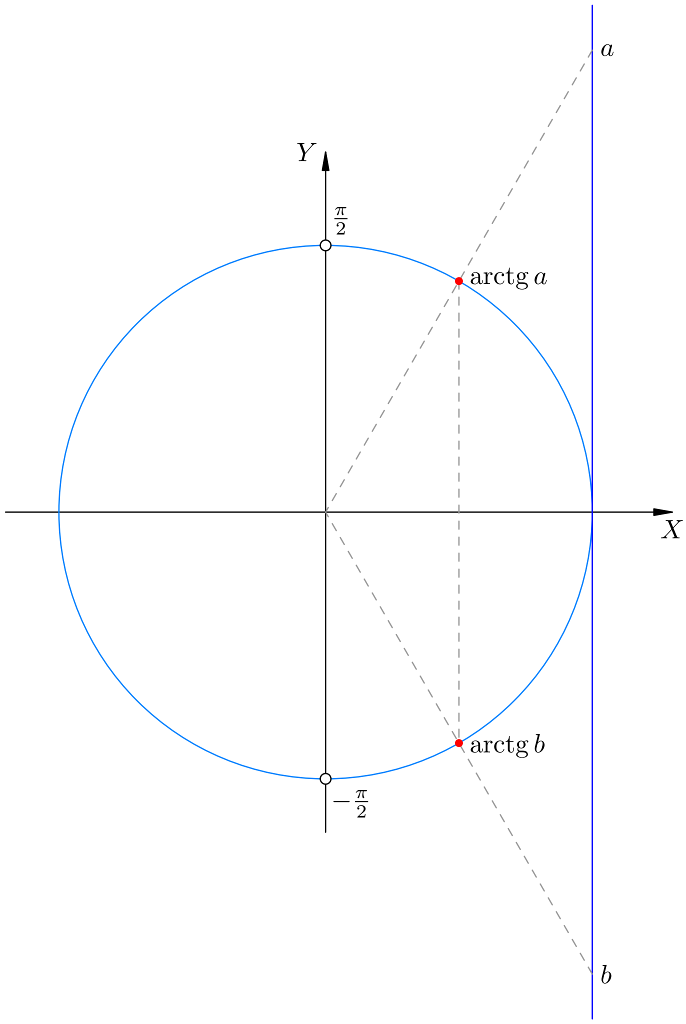

Рис. 12. Арктангенс на тригонометрической окружности

На данном рисунке изображено также число $b = -a$ и указан $\operatorname{arctg} b$. Хорошо видна нечётность арктангенса: $\operatorname{arctg} b = -\operatorname{arctg} a$.

Пример. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример. $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Этот же результат сразу получается из нечётности арктангенса: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Пример. Взятие тангенса от арктангенса возвращает нас к исходному числу: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ при любом a. Это прямо вытекает из определения: ведь $\operatorname{arctg} a$ — это число, тангенс которого равен a.

Пример. Взятие арктангенса от тангенса не обязательно возвращает нас к исходному числу: в общем случае $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) \neq \alpha$.

Равенство достигается для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, например:

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Однако в случае $\alpha \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ нарушение равенства налицо:

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}\,.$$

Пример. Вычислим $\cos(\operatorname{arctg} 2)$. Пусть $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$; мы ищем, таким образом, $\cos\alpha$. Имеем:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2)} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}\,.$$

Будучи арктангенсом, угол α принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Косинус на этом интервале положителен, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Итак, $\cos(\operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример. Вычислим $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$. Действуем аналогично: обозначаем $\operatorname{arctg}\sqrt{2} = \alpha$. Имеем:

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}\,.$$

Теперь заметим, что угол α положителен; будучи при этом арктангенсом, он принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Синус на этом интервале положителен, поэтому

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Таким образом, $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Арккотангенс

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и прямую $y = a$ (рис. 13).

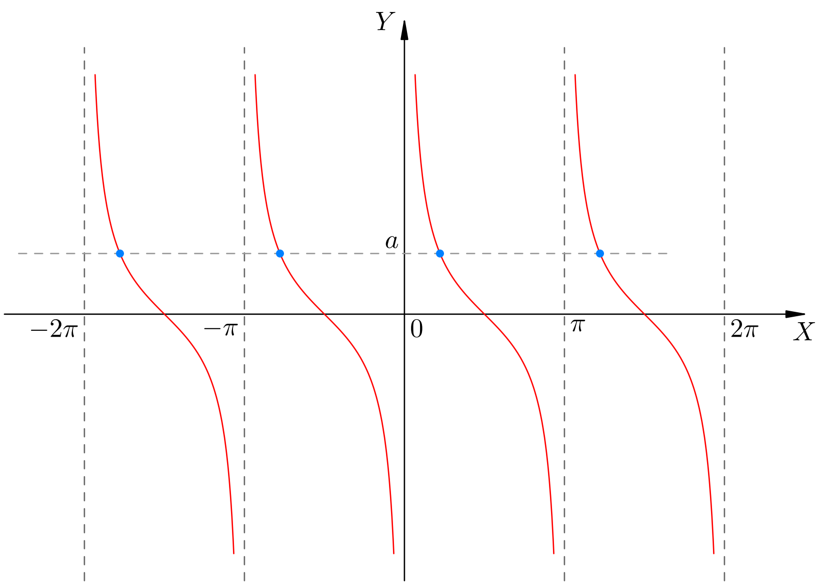

Рис. 13. Углов с данным котангенсом бесконечно много

Мы видим, что при любом a прямая пересекает график котангенса в бесконечном множестве точек. Следовательно, каково бы ни было число a, найдётся бесконечно много углов x, котангенс которых равен a.

Чтобы точка пересечения оказалась единственной, нужно ограничиться одной из ветвей котангенса. Удобно выбрать ветвь, отвечающую значениям x из интервала $(0; \pi)$. Это показано на рис. 14.

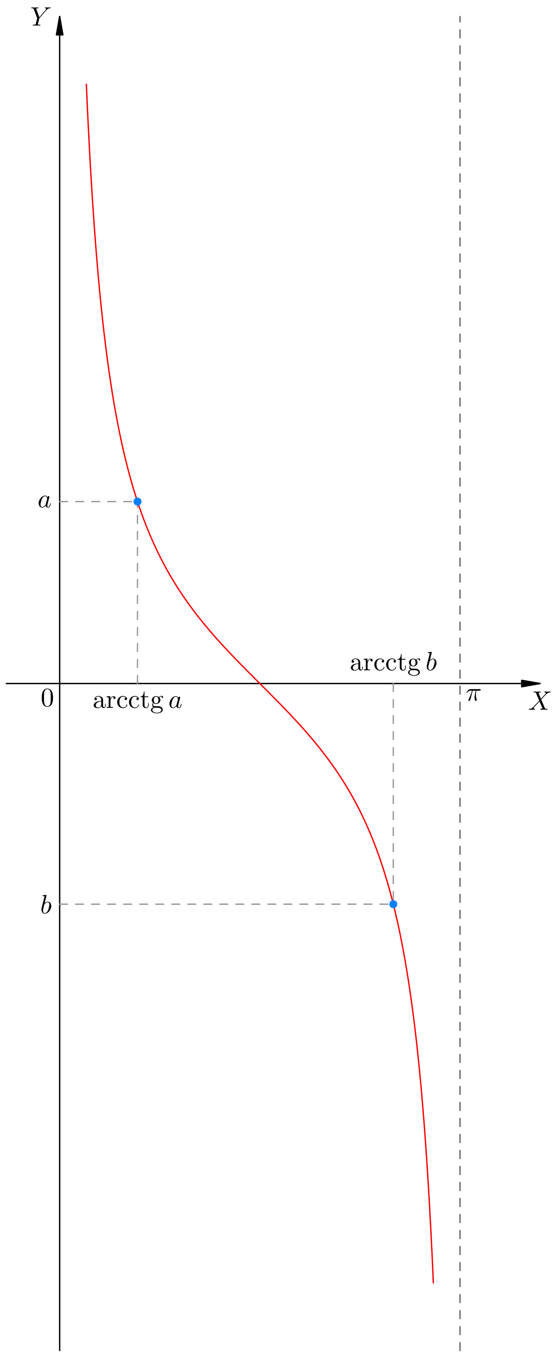

Рис. 14. График котангенса на интервале $(0; \pi)$

Теперь при любом a прямая $y = a$ пересекает выбранную ветвь *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

Иными словами, существует *единственное* значение x на интервале $(0; \pi)$, для которого справедливо равенство $\operatorname{ctg} x = a$. Это значение x называется **арккотангенсом** числа a и обозначается $\operatorname{arcctg} a$.

Определение. Арккотангенс числа a — это число, принадлежащее интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен a:

$$x = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ x \in (0;\pi). \end{cases} \tag{11}$$

Переобозначим в (11) величину a через x, а величину x через y:

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} y = x, \\ y \in (0;\pi). \end{cases} \tag{12}$$

Мы получили функцию $y = \operatorname{arcctg} x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- *Областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.* Это следует из соотношения $x = \operatorname{ctg} y$ и того факта, что $\operatorname{ctg} y$ на интервале $(0;\pi)$ пробегает всё множество $\mathbb{R}$.
- *Областью значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является интервал $(0;\pi)$.* Смотрите вторую строку в определении (12).

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображён на рис. 15.

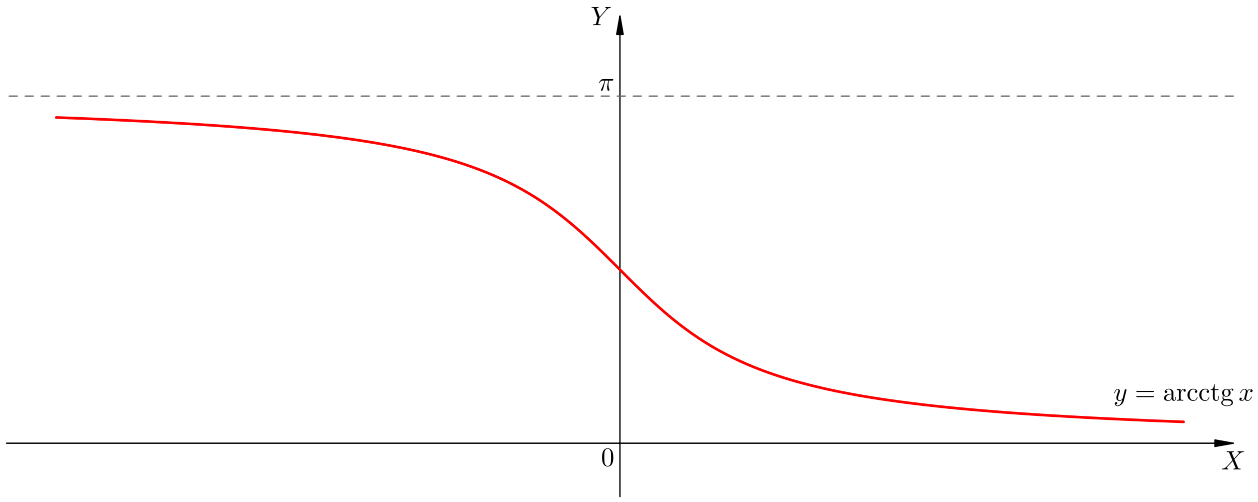

Рис. 15. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

График арккотангенса есть та же самая линия, что и ветвь котангенса на рис. 14, но только расположенная по-другому. Действительно, поменяйте на рис. 15 местами буквы X и Y, после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. Вы получите в точности кривую на рис. 14.

И снова сделайте полезное упражнение: нарисуйте выбранную ветвь котангенса и график арккотангенса в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

График арккотангенса не симметричен относительно оси Y и не симметричен относительно начала координат. Стало быть, *арккотангенс не является ни чётной, ни нечётной функцией.*

Как и в случае арктангенса, график арккотангенса имеет две горизонтальные асимптоты. Это прямая $y = 0$ (к которой график неограниченно приближается при $x \to +\infty$) и прямая $y = \pi$ (к которой график неограниченно приближается при $x \to -\infty$). Разумеется, горизонтальные асимптоты арккотангенса суть не что иное, как отражённые относительно прямой $y = x$ вертикальные асимптоты $x = 0$ и $x = \pi$ выбранной ветви котангенса.

Из рис. 15 мы видим также, что *функция* $y = \operatorname{arcctg} x$ *убывает на всей числовой оси.*

Изобразим арккотангенс на тригонометрической окружности (рис. 16). Как видим, «арккотангенсы живут сверху» (то есть на верхней полуокружности), но не просто сверху, а именно на интервале $(0; \pi)$.

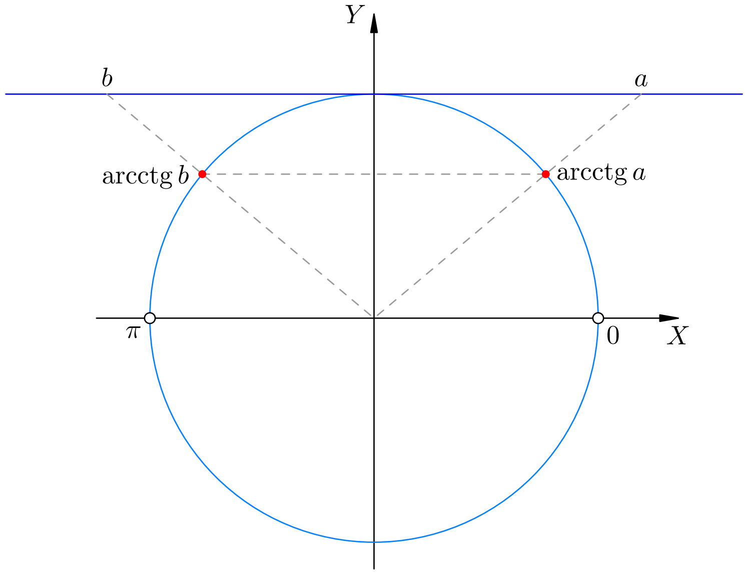

Рис. 16. Арккотангенс на тригонометрической окружности

Наряду с числом a мы показали на рисунке число $b = -a$. Легко видеть, что соответствующие арккотангенсы связаны соотношением $\operatorname{arcctg} b = \pi - \operatorname{arcctg} a$. Таким образом, аналогом равенства (10) в случае арккотангенса служит следующее соотношение:

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{13}$$

Пример. $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Пример. $\operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Как видим, соотношение (13) выполнено: $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, то есть $\operatorname{arcctg} \left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

Пример. Для любого a справедливо равенство $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$. Это прямо следует из определения арккотангенса — ведь $\operatorname{arcctg} a$ есть угол, котангенс которого равен a. Таким образом, котангенс от арккотангенса непременно возвращает нас к исходному числу.

Пример. А вот взятие арккотангенса от котангенса не обязательно даст исходное число; иными словами, равенство $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, вообще говоря, не верно.

Если $\alpha \in (0; \pi)$, до данное равенство выполнено. Например:

$$\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Но если $\alpha \notin (0; \pi)$, то равенство нарушается:

$$\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}\,.$$

Пример. Вычислим $\sin(\operatorname{arcctg} 3)$. Пусть $\operatorname{arcctg} 3 = \alpha$; мы ищем, таким образом, $\sin \alpha$. Имеем:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 3)} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}\,.$$

Будучи арккотангенсом, угол α принадлежит интервалу $(0;\pi)$. Синус на этом интервале положителен, поэтому

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}\,.$$

Итак, $\sin(\operatorname{arcctg} 3) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример. Вычислим $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)$. Снова обозначаем $\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = \alpha$. Имеем:

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}} = \frac{16}{25}\,.$$

Теперь заметим, что угол α принадлежит интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Косинус на этом интервале положителен, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

Таким образом, $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{5}$.

Связь арктангенса и арккотангенса

Арктангенс и арккотангенс одного и того же числа x связаны следующим соотношением:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Данная формула аналогична формуле (7) и доказывается точно так же. Попробуйте провести доказательство самостоятельно.